

ผลการเรียนรู้

เข้าใจขนาดของเมทริกซ์ หาผลบวกของเมทริกซ์กับเมทริกซ์

สาระสำคัญ

บทนิยาม 3 การบวกเมทริกซ์

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

ผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คือ เมทริกซ์ $[c_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก

$i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

เขียนแทน A บวก B ด้วย $A + B$ นั่นคือ $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

บทนิยาม 6

เมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็น 0 เรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ เขียนแทนด้วย $\underline{0}_{m \times n}$ หรือ $\underline{0}$

ทฤษฎีบท 1

ให้ A, B, C และ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และ c, d เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนเข้าใจสมบัติที่เกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์
2. นักเรียนแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์ได้

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบท 1

ให้ A, B, C และ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และ c, d เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$

จากทฤษฎีบท 1 ข้อที่ 3 จะเรียก $\underline{0}$ ว่า เอกลักษณ์การบวก ในเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 4 จะเรียก $-A$ ว่า ตัวผกผันการบวก หรือ อินเวอร์สการบวก ของ A

นอกจากนี้ จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 2 ทำให้สามารถแทน $A + (B + C)$ และ $(A + B) + C$ ด้วย $A + B + C$ โดยไม่เกิดความสับสน

กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ครูทบทวนการบวกเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

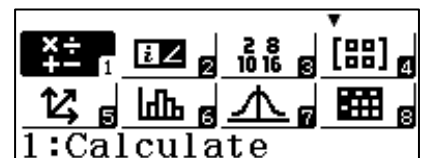
ตัวอย่างที่ 1 $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (ไม่ใช่เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์)

วิธีทำ $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 2+(-3) \\ 1+5 & 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

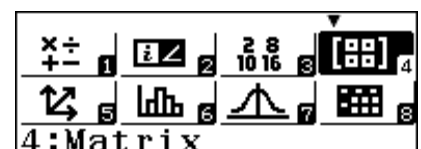
ตัวอย่างที่ 2 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ Casio)

วิธีทำ

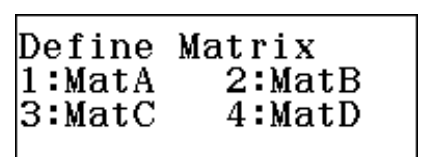
- 1) กดปุ่ม **MENU**



- 2) กด **4** เลือกเมนู 4: Matrix



- 3) กดปุ่ม **1** เพื่อสร้าง Matrix A
ในเครื่องจะขึ้นว่า 1:MatA



จากนั้นกำหนด จำนวนแถว (Row) เป็น 3 กด **[3]**

กำหนดจำนวนหลัก (column) เป็น 3 กด **[3]**

4) ระบุสมาชิกของเมทริกซ์ A โดยกดปุ่มตัวเลข
เพื่อใส่สมาชิกในเมทริกซ์ทีละตัวและกดปุ่ม **[=]**

5) เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A เสร็จแล้วให้กดปุ่ม **[OPTN]**
แล้วเลือก 1: Define Matrix โดยกด **[1]**

6) กดปุ่ม **[2]** เพื่อ Define Matrix B

7) จากนั้นใส่สมาชิกเมทริกซ์ B
โดยมีขั้นตอนเช่นเดียวกันกับการสร้างเมทริกซ์ A

8) กด **[AC]**

9) จากนั้นหาค่าของ $A + B$ โดยกด **[OPTN]**

กด **[3]** เพื่อเลือก Matrix A

กด **[+]** กด **[OPTN]** และกด **[4]** เพื่อเลือก Matrix B

```
MatA
Number of Rows?
Select 1~4
```

```
MatA
Number of
Columns?
Select 1~4
```

```
MatA=
[ 0  0  0 ]
[ 0  0  0 ]
[ 0  0  0 ]
```

```
MatA=
[ 1  3 -2 ]
[ 2 -1  4 ]
[ 5 -2  7 ]
```

```
1:Define Matrix
2>Edit Matrix
3:Matrix Calc
```

```
Define Matrix
1:MatA   2:MatB
3:MatC   4:MatD
```


```
MatB=
[ -3  1  2 ]
[  2  5 -1 ]
[  1  3  2 ]
```

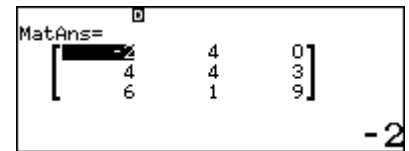
```
Matrix
```

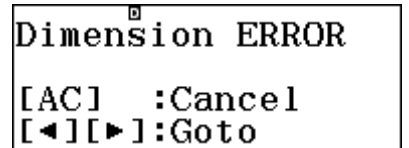
```
1:Define Matrix
2>Edit Matrix
3:MatA   4:MatB
5:MatC   6:MatD
```

```
MatA
```

```
MatA+MatB
```

กด  เพื่อให้เครื่องคำนวณผลบวก
ซึ่งจะได้เมทริกซ์ผลลัพธ์ (MatAns) ออกมา



2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องสมบัติที่เกี่ยวกับการบวกเมทริกซ์
3. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม 3 – 5 คน เพื่อทำใบกิจกรรมที่ 1 โดยให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ Casio รุ่น fx-991EX Classwiz ในการหาคำตอบและให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายถึงข้อค้นพบในแต่ละข้อ ในใบกิจกรรมที่เกิดขึ้นเพื่อตอบคำถามท้ายข้อในแต่ละข้อ (ขั้นการสำรวจและหาความสัมพันธ์)
4. ครูให้นักเรียนนำเสนอผลการอภิปรายจากใบกิจกรรม ดังนี้ (ขั้นการสรุปความสัมพันธ์)
 - 4.1 จากใบกิจกรรมข้อที่ 1 เมทริกซ์ที่จะบวกกันได้จะต้องเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน หากเมทริกซ์ที่นำมาบวกกันมีขนาดไม่เท่ากัน จะบวกกันไม่ได้ หน้าจอเครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์จะแสดงดังนี้
 
 - 4.2 จากใบกิจกรรมข้อที่ 2 และ 3 เมทริกซ์มีสมบัติสลับที่สำหรับการบวก หรือสรุปเป็นสมบัตินี้ สำหรับเมทริกซ์ A, B มีมิติ $m \times n$ จะได้ $A + B = B + A$
 - 4.3 จากใบกิจกรรมข้อที่ 4 และ 5 เมทริกซ์มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มสำหรับการบวก หรือสรุปเป็นสมบัตินี้ สำหรับเมทริกซ์ A, B, C มีมิติ $m \times n$ จะได้ $A + (B + C) = (A + B) + C$
 - 4.4 จากใบกิจกรรมข้อที่ 6 และ 7 ถ้าเมทริกซ์ A และ 0 มีมิติ $m \times n$ จะได้ว่า $A + 0 = 0 + A = A$
 - 4.5 จากใบกิจกรรมข้อที่ 8 ถ้าเมทริกซ์ A มีมิติ $m \times n$ จะได้ว่า $A + (-A) = A + (-A) = 0$
5. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่องการบวกเมทริกซ์ โดยไม่ใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ (ขั้นการฝึกทักษะ)
6. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปสมบัติการบวกของเมทริกซ์

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องการบวกเมทริกซ์
3. แบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่องการบวกเมทริกซ์

การวัดผลและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 1
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 1
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 1

เรื่อง การบวกเมทริกซ์

- 1) ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz หาผลบวกของเมทริกซ์ต่อไปนี้และตอบคำถามท้ายใบกิจกรรม

$$1.1 \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$1.2 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$1.3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$1.4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$1.5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$1.6 \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} =$$

คำถามท้ายกิจกรรม

1. การบวกเมทริกซ์ในข้อใดหาค่าได้และการบวกเมทริกซ์ในข้อใดหาค่าไม่ได้
.....
2. เมทริกซ์ที่หาผลบวกได้จะมีขนาดของเมทริกซ์ที่เป็นตัวตั้งกับเมทริกซ์ที่เป็นตัวบวกเท่ากันหรือไม่
.....
3. เมทริกซ์ที่หาผลบวกได้จะมีขนาดของเมทริกซ์ที่เป็นผลลัพธ์เป็นอย่างไร
.....
4. เมทริกซ์ที่หาผลบวกได้จะมีขนาดของเมทริกซ์ที่เป็นตัวตั้งกับเมทริกซ์ที่เป็นตัวบวกเท่ากันหรือไม่
.....

- 2) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

$$2.1 \ A + B =$$

$$2.2 \ B + A =$$

$$2.4 \ A + C =$$

$$2.5 \ C + A =$$

$$2.7 \ B + C =$$

$$2.8 \ C + B =$$

จากข้อ 2) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ A, B มีมิติ 2×2 จะได้ $A + B =$

3) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -2 & 13 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 $A + B =$

3.2 $B + A =$

3.3 $A + C =$

3.4 $C + A =$

3.5 $B + C =$

3.6 $C + B =$

จากข้อ 3) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ A, B มีมิติ 3×2 จะได้ $A + B =$

จากข้อ 2) และ 3) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ A, B มีมิติ $m \times n$ จะได้ $A + B =$

4) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

4.1 $A + (B + C) =$

4.2 $(A + B) + C =$

4.3 $A + (B + D) =$

4.4 $(A + B) + D =$

4.5 $A + (C + D) =$

4.6 $(A + C) + D =$

จากข้อ 4) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ A, B, C มีมิติ 2×2 จะได้ $A + (B + C) =$

5) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -2 & 13 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

5.1 $A + (B + C) =$

5.2 $(A + B) + C =$

5.3 $A + (B + D) =$

5.4 $(A + B) + D =$

5.5 $A + (C + D) =$

5.6 $(A + C) + D =$

จากข้อ 5) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ A, B, C มีมิติ 3×2 จะได้ $A + (B + C) = \dots\dots\dots$

จากข้อ 4) และ 5) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ A, B, C มีมิติ $m \times n$ จะได้ $A + (B + C) = \dots\dots\dots$

6) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

6.1 $A + D =$

6.2 $D + A =$

6.3 $B + D =$

6.4 $D + B =$

6.5 $C + D =$

6.6 $D + C =$

จากข้อ 6) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ $A, B, \underline{0}$ มีมิติ 2×2 จะได้

$A + \underline{0} = \dots\dots\dots$ และ $\underline{0} + A = \dots\dots\dots$

7) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 13 \\ -2 & 13 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

7.1 $A + D =$

7.2 $D + A =$

7.3 $B + D =$

7.4 $D + B =$

7.5 $C + D =$

7.6 $D + C =$

จากข้อ 7) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ $A, B, \underline{0}$ มีมิติ 3×2 จะได้

$$A + \underline{0} = \dots\dots\dots \text{ และ } \underline{0} + A = \dots\dots\dots$$

จากข้อ 6) และ 7) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ $A, B, \underline{0}$ มีมิติ $m \times n$ จะได้

$$A + \underline{0} = \dots\dots\dots \text{ และ } \underline{0} + A = \dots\dots\dots$$

8) กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

8.1 $A + (-A) =$

8.2 $(-A) + A =$

8.3 $B + (-B) =$

8.4 $(-B) + B =$

8.5 $C + (-C) =$

8.6 $(-C) + C =$

จากข้อ 8) พบว่า สำหรับเมทริกซ์ A มีมิติ $m \times n$ จะได้

$$A + (-A) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

แบบฝึกทักษะที่ 1
เรื่อง การบวกเมทริกซ์

1. ให้ A, B, C และ D เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×2 , 3×2 , 2×3 และ 2×3 จงหาว่าเมทริกซ์ในข้อใดมีความหมาย ในกรณีที่มีความหมายจงหาขนาดและจำนวนสมาชิกในเมทริกซ์นั้นด้วย

1) $A + B$

2) $A + C$

3) $A + D$

4) $B + C$

5) $C + D$

2. จงหาค่าของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} =$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} + \left(-\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \right) =$

4) $\left(-\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} =$